1. Определение антагонистической игры и ее решения.

Пусть функция $F(x, y)$ определена на декартовом произведении $X \times Y$, где X, Y – множества произвольной природы.

Определение. Пара $(x^0, y^0) \in X \times Y$ называется *седловой точкой* функции $F(x, y)$ на $X \times Y$, если

$$F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) \leq F(x^0, y) \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, y \in Y \tag{2.1}$$

или, эквивалентно,

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \min_{y \in Y} F(x^0, y).$$

\

Опишем антагонистическую игру. В ней принимают участие два игрока 1 и 2 (первый и второй). Игрок 1 выбирает стратегию x из множества стратегий X, игрок 2 выбирает стратегию y из множества стратегий Y. Нормальная форма игры подразумевает, что каждый игрок выбирает свою стратегию независимо, не зная выбора партнера. Задана *функция выигрыша* $F(x, y)$ первого игрока, определенная на $X \times Y$. Выигрыш $F(x, y)$ первого игрока является проигрышем для второго. Цель первого игрока состоит в увеличении своего выигрыша $F(x, y)$, а цель второго – в уменьшении $F(x, y)$. Таким образом, антагонистическая игра задается набором $\Gamma = \langle X, \ Y, \ F(x, y) \rangle$.

Определение. Говорят, что антагонистическая игра Γ имеет *решение*, если функция $F(x, y)$ имеет на $X \times Y$ седловую точку. Пусть (x^0, y^0) – седловая точка функции $F(x, y)$. Тогда тройка $(x^0, y^0, v = F(x^0, y^0))$ называется решением игры, x^0, y^0 – *оптимальными* стратегиями игроков, а v – *значением* игры.

Покажем, что значение игры не зависит от выбора седловой точки.

Лемма 2.1. Если (x^0, y^0), (x^*, y^*) – две седловые точки функции $F(x, y)$ на $X \times Y$, то $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$.

Определение. Антагонистическая игра Γ называется *матричной*, если множества стратегий игроков конечны: $X = \{1, ..., m\}$, $Y = \{1, ..., n\}$. При этом принято обозначать стратегию первого игрока через i, стратегию второго через j, а выигрыш первого $F(i, j)$ через a_{ij}. Матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$ называется матрицей игры. Первый игрок выбирает в ней номер строки i, а второй – номер столбца j.

В обозначениях матричной игры (i^0, j^0) – седловая точка матрицы A, если $a_{ij^0} \leq a_{i^0j^0} \leq a_{i^0j}$, $i = 1, ...m$, $j = 1, ..., n$.

2. Теорема о необходимом и достаточном условии существования седловой точки. Метод поиска седловых точек.

Рассмотрим игру Γ с точки зрения первого игрока. Пусть он выбрал стратегию x. Ясно, что его выигрыш будет не меньше, чем $\inf\limits_{y\in Y} F(x,y)$. Величину $\inf\limits_{y\in Y} F(x,y)$ назовем *гарантированным результатом (выигрышем)* для первого игрока. Наилучший гарантированный результат для первого игрока $\underline{v} = \sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y} F(x,y)$ называется *нижним значением* игры.

Определение. Стратегия x^0 первого игрока называется *максиминной*, если $\inf\limits_{y\in Y} F(x^0,y) = \underline{v}$.

Рассмотрим игру Γ с точки зрения второго игрока. Если он выбрал стратегию y, то для него естественно считать гарантированным результатом величину $\sup\limits_{x\in X} F(x,y)$. Проигрыш второго игрока будет не больше, чем эта величина. Наилучший гарантированный результат для второго игрока $\overline{v} = \inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X} F(x,y)$ называется *верхним значением* игры.

Определение. Стратегия y^0 второго игрока называется *минимаксной*, если $\sup\limits_{x\in X} F(x,y^0) = \overline{v}$.

Лемма 2.2. В любой антагонистической игре Γ справедливо неравенство $\underline{v} \le \overline{v}$.[1]

Теорема 2.1. 1) Для того чтобы функция $F(x,y)$ на $X\times Y$ имела седловую точку, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство

$$\max_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x,y) = \min_{y\in Y}\sup_{x\in X} F(x,y). \tag{2.3}$$

2) Пусть выполнено равенство (2.3). Пара (x^0,y^0) тогда и только тогда является седловой точкой, когда x^0 – максиминная, а y^0 – минимаксная стратегии игроков.

3. Условия существования максиминных и минимаксных стратегий.

Теорема 2.2. Пусть функция $F(x,y)$ непрерывна на $X\times Y$, где X, Y – компакты метрических пространств[1]. Положим $Y(x) \overset{def}{=} \operatorname{Argmin}\limits_{y\in Y} F(x,y)$. Тогда

1) Функция минимума $W(x) = \min\limits_{y\in Y} F(x,y)$ непрерывна на X.

2) Предположим дополнительно, что при каждом $x \in X$ множество $Y(x)$ состоит из единственного элемента $y(x)$. Тогда функция $y(x)$ непрерывна на X.

Определение. Антагонистическая игра Γ называется *непрерывной,* если X, Y – параллелепипеды евклидовых пространств, а функция $F(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$. В частности, при
$X = [a, b]$, $Y = [c, d]$ будем говорить о непрерывной игре на прямоугольнике.

Из теоремы 2.2 следует, что в непрерывной игре Γ существуют максиминные и минимаксные стратегии игроков.

4. Теорема существования седловой точки у вогнуто-выпуклой функции.

Определение. Множество Z евклидова пространства называется *выпуклым,* если для любых точек $z' \neq z''$ из Z и любого числа $0 < \lambda < 1$ точка $\lambda z' + (1 - \lambda) z''$ также принадлежит множеству Z.

Определение. Функция $h(z)$, определенная на выпуклом множестве Z, называется *выпуклой,* если для любых точек $z' \neq z''$ из Z и любого числа $0 < \lambda < 1$ выполнено неравенство

$$h(\lambda z' + (1 - \lambda) z'') \leq \lambda h(z') + (1 - \lambda) h(z''). \qquad (2.4)$$

Если последнее неравенство выполнено как строгое, то функция $h(z)$ называется *строго выпуклой.* Если вместо неравенства $\leq$ в (2.4) фигурирует неравенство $\geq$ $(>)$, то функция $h(z)$ называется *вогнутой (строго вогнутой).*

Теорема 2.3. Пусть $X \subset E^m$ и $Y \subset E^n$ – выпуклые компакты евклидовых пространств, а функция $F(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$. Предположим, что при любом $y \in Y$ функция $F(x, y)$ вогнута по x и при любом $x \in X$ она выпукла по y. Тогда функция $F(x, y)$ имеет на $X \times Y$ седловую точку.

5. Смешанное расширение антагонистической игры.

Определение. Смешанной стратегией первого игрока в игре Γ называется вероятностное распределение φ на множестве стратегий X.

Для первого игрока применить смешанную стратегию φ – это выбрать стратегию $x \in X$ как реализацию случайной величины, имеющей закон распределения φ. Далее рассматриваются три вида смешанных стратегий.

1) Пусть $X = \{1, ..., m\}$, как это имеет место в матричной игре. Тогда вместо φ для обозначения смешанной стратегии будем использовать "вероятностный"вектор $p = (p_1, ..., p_m)$, удовлетворяющий ограничениям $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \ p_i \geq 0,\ i = 1, ..., m$. Если применяется p, то стратегия i выбирается с вероятностью p_i.

2) Пусть $X = [a, b]$, как это имеет место в непрерывной игре на прямоугольнике. Здесь смешанная стратегия – функция распределения φ на отрезке $[a, b]$.

3) Пусть X – выпуклый компакт евклидова пространства. Здесь примером смешанной стратегии может служить вероятностная мера, сосредоточенная в конечном числе точек:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i I_{x^{(i)}}(x),\ \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \ p_i \geq 0,\ \ x^{(i)} \in X,\ i = 1, ..., m,$$

где

$$I_{x^{(i)}}(x) = \begin{cases} 1, & x = x^{(i)}, \\ 0, & x \neq x^{(i)}. \end{cases}$$

$\{\varphi\}$ – множество всех смешанных стратегий первого игрока на множестве X.

Множество X будем называть множеством *чистых* стратегий первого игрока (в противовес смешанным).

Займемся построением *смешанного расширения* антагонистической игры $\Gamma = \langle X,\ Y,\ F(x, y)\rangle$. Аналогично, пусть $\{\psi\}$ – множество смешанных стратегий второго игрока, т.е. вероятностных распределений ψ на множестве Y его чистых стратегий. При заданных стратегиях φ и ψ математическое ожидание выигрыша первого игрока определяется формулой $F(\varphi, \psi) = \int\limits_X \int\limits_Y F(x, y) d\varphi(x) d\psi(y)$. двойной интеграл существует.

Определение. Антагонистическая игра $\overline{\Gamma} = \big\langle \{\varphi\},\ \{\psi\},\ F(\varphi, \psi)\big\rangle$ называется смешанным расширением игры Γ.

Определение. Решение $(\varphi^0, \psi^0, v = F(\varphi^0, \psi^0))$ игры $\overline{\Gamma}$ называется решением исходной игры Γ в смешанных стратегиях. При этом φ^0, ψ^0 называются *оптимальными смешанными* стратегиями игроков, а v – *значением* игры Γ.

Далее будут построены смешанные расширения матричных и непрерывных игр и будет показано, что эти игры всегда имеют решение в смешанных стратегиях.

6. Основная теорема матричных игр.

Напомним, что матричная игра Γ задается матрицей $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Множество смешанных стратегий первого игрока –

$$P = \{p = (p_1, ..., p_m) \ | \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \ \ p_i \geq 0, \ i = 1, ..., m\},$$

множество смешанных стратегий второго игрока –

$$Q = \{q = (q_1, ..., q_n) \ | \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \ \ q_j \geq 0, \ j = 1, ..., n\},$$

а математическое ожидание выигрыша первого игрока –

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j.$$

Таким образом, $\overline{\Gamma} = \left\langle P, \ Q, \ A(p, q) \right\rangle$ – смешанное расширение матричной игры Γ.

Теорема 3.1 (Основная теорема матричных игр). Всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Отметим типичные случаи, когда применяются смешанные стратегии.

1) Игра повторяется много раз. В этом случае за большое число повторений игры средний выигрыш первого игрока, использующего оптимальную смешанную стратегию, будет близок к значению игры или будет превышать его.

2) Смешанная стратегия реализуется в виде "физической смеси"чистых стратегий. Что это означает, поясним на примерах.

3) Смешанные стратегии можно применять и при однократном повторении игры, когда игрок действует в условиях риска. При этом необходимо выигрыши заменить на их "полезности", учитывающие отношение игрока к риску.

7. Основная теорема непрерывных игр.

Займемся смешанным расширением непрерывной игры Γ. Ограничимся игрой на прямоугольнике $X \times Y = [a, b] \times [c, d]$. При заданных стратегиях φ и ψ – функциях распределения на отрезках X и Y – ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$F(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F(x, y) d\varphi(x) d\psi(y).$$

Теорема 3.2. Множество смешанных стратегий $\{\varphi\}$ на отрезке $[a, b]$ является слабым компактом. Это означает, что из любой последовательности смешанных стратегий $\{\varphi^k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi^{k_l}\}$, слабо сходящуюся к некоторой стратегии φ^0

Лемма 3.1. В непрерывной игре Γ на прямоугольнике существуют максиминная и минимаксная смешанные стратегии игроков.

Теорема 3.3 (Основная теорема непрерывных игр). Всякая непрерывная игра Γ на прямоугольнике имеет решение в смешанных стратегиях.

8. Свойства решений антагонистических игр в смешанных стратегиях.

Эти свойства в частных случаях позволяют находить оптимальные смешанные стратегии.

Теорема 4.1. Для того чтобы тройка (φ^0, ψ^0, v) была решением в смешанных стратегиях непрерывной игры Γ, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$F(x, \psi^0) \leq v \leq F(\varphi^0, y) \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, y \in Y. \qquad (*)$$

Теорема 4.1′. Для того чтобы тройка (p^0, q^0, v) была решением в смешанных стратегиях игры с матрицей A, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$A(i, q^0) \leq v \leq A(p^0, j), \quad i = 1, ...m, \quad j = 1, ..., m. \qquad (*)$$

Пусть $\overline{\Gamma}$ – смешанное расширение произвольной антагонистической игры Γ.

Определение. Смешанная стратегия ψ^0 второго игрока называется *выравнивающей,* если $F(x, \psi^0) \equiv const$ на множестве X.

Аналогично определяется выравнивающая стратегия первого игрока.

Утверждение 4.1. Если в игре $\overline{\Gamma}$ у обоих игроков существуют выравнивающие стратегии φ^0, ψ^0, то они оптимальны.

Теорема 4.2. Для непрерывной игры Г справедливы следующие два утверждения:

1) $\inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y) \;\; \forall \;\; \varphi \in \{\varphi\}$;

2) $\sup\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) = \max\limits_{x \in X} F(x, \psi) \;\; \forall \;\; \psi \in \{\psi\}$.

Следствие. Значение v непрерывной игры Г может быть представлено в виде следующих двух формул:

$$v = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{x \in X} F(x, \psi).$$

Теорема 4.2′. Для игры с матрицей A справедливы следующие два утверждения:

1) $\min\limits_{q \in Q} A(p, q) = \min\limits_{1 \le j \le n} A(p, j) \;\; \forall \;\; p \in P$;

2) $\max\limits_{p \in P} A(p, q) = \max\limits_{1 \le i \le m} A(i, q) \;\; \forall \;\; q \in Q$.

Докажите самостоятельно.

Следствие. Значение v игры с матрицей A может быть представлено в виде следующих двух формул:

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i, q).$$

Теперь обсудим так называемое свойство *дополняющей нежесткости.* Определим множество $Sp(\varphi) \subset X$ – спектр смешанной стратегии φ, заданной на отрезке X.

Определение. Будем говорить, что точка $x' \in X = [a, b]$ принадлежит спектру стратегии φ, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой отрезок $[a', b']$, содержащий x', что $b' - a' < \varepsilon$ и $\varphi(b') - \varphi(a') > 0$. Множество всех точек спектра обозначим через $Sp(\varphi)$.

Теорема 4.3 (Свойство дополняющей нежесткости). Пусть (φ^0, ψ^0, v) – решение в смешанных стратегиях непрерывной игры Г. Тогда

1) $x \in Sp(\varphi^0) \Rightarrow F(x, \psi^0) = v$;

2) $y \in Sp(\psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, y) = v$.

Следствие. Пусть (φ^0, ψ^0, v) – решение в смешанных стратегиях непрерывной игры Г. Тогда

1) $F(x, \psi^0) < v \Rightarrow x \notin Sp(\varphi^0)$;

2) $F(\varphi^0, y) > v \Rightarrow y \notin Sp(\psi^0)$.

Теорема 4.3′ (Свойство дополняющей нежесткости). Пусть (p^0, q^0, v) – решение в смешанных стратегиях игры с матрицей A. Тогда

1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = v$;
2) $q_j^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = v$.

Следствие. Пусть (p^0, q^0, v) – решение в смешанных стратегиях игры с матрицей A. Тогда

1) $A(i, q^0) < v \Rightarrow p_i^0 = 0$;
2) $A(p^0, j) > v \Rightarrow q_j^0 = 0$.

9. Теоремы о доминировании строк и столбцов в матричных играх.

Если элементы некоторой строки i_1 матрицы A меньше соответствующих элементов другой строки i_2, то интуитивно ясно, что строку i_1 первому игроку можно не использовать.

Определение. Будем говорить, что вектор $a = (a_1, ..., a_l)$ *слабо доминирует* вектор $b = (b_1, ..., b_l)$, если $a_i \geq b_i,\ i = 1, ..., l$. Будем говорить о *строгом доминировании,* если все нестрогие неравенства $\geq$ заменены на строгие $>$. Заметим, что слабое доминирование возможно даже в случае равенства векторов a и b.

Определение. Для векторов $a^{(i)},\ i = 1, ..., m$, евклидова пространства и чисел $p_i \geq 0,\ i = 1, ..., m,\ \ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$, линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i a^{(i)}$ называется *выпуклой комбинацией* векторов $a^{(i)}$ с коэффициентами p_i.

Теорема 5.1 (О доминировании строк). Пусть некоторая строка матрицы A слабо доминируется выпуклой комбинацией остальных строк. Тогда эта строка входит с нулевой вероятностью в *некоторую* оптимальную смешанную стратегию первого игрока. Если указанное доминирование строгое, то эта строка входит с нулевой вероятностью в *любую* оптимальную смешанную стратегию первого игрока. Доминируемые строки можно вычеркнуть из матрицы игры.

Теорема 5.1′ (О доминировании столбцов). Пусть некоторый столбец матрицы A слабо доминирует выпуклую комбинацию остальных столбцов этой матрицы. Тогда этот столбец входит с нулевой вероятностью в *некоторую* оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Если указанное доминирование строгое, то этот столбец входит с нулевой вероятностью в *любую* оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Доминирующие столбцы можно вычеркнуть из матрицы игры.

10. Графический метод решения матричных игр вида 2*n и m*2 .

Рассмотрим игру с $2 \times n$-матрицей A. Смешанная стратегия первого игрока $p = (p_1, 1 - p_1)$ определяется величиной $p_1 \in [0,1]$. Значение игры, согласно $v = \max\limits_{p \in P} \min\limits_{1 \le j \le n} A(p, j) = \max\limits_{0 \le p_1 \le 1} \min\limits_{1 \le j \le n} [a_{1j} p_1 + a_{2j}(1 - p_1)]$.

Для нахождения значения игры и оптимальной смешанной стратегии первого игрока достаточно на отрезке [0,1] построить графики семейства линейных функций $l_j(p_1) = a_{1j} p_1 + a_{2j}(1 - p_1)$ с угловыми коэффициентами $k_j = a_{1j} - a_{2j}$, $j = 1, ..., n$, и найти точку максимума p_1^0 функции $\min\limits_{1 \le j \le n} l_j(p_1)$ – нижней огибающей семейства

Найдем оптимальную смешанную стратегию второго игрока. Разберем следующие возможности.

а) $0 < p_1^0 < 1$. Возьмем две прямые l_{j_1} и l_{j_2}, проходящие через точку (p_1^0, v) и имеющие угловые коэффициенты $k_{j_1} \ge 0$, $k_{j_2} \le 0$. Рассмотрим уравнение $k_{j_1} q^* + k_{j_2}(1 - q^*) = 0$. (5.2)
Оно имеет решение q^*, принадлежащее отрезку [0,1]. Из (5.2) следует, что угловой коэффициент прямой $l_{j_1}(p_1) q^* + l_{j_2}(p_1)(1 - q^*)$ равен нулю. Смешанная стратегия второго игрока

$$q^0 : \ q_j^0 = \begin{cases} q^*, & j = j_1, \\ 1 - q^*, & j = j_2, \\ 0, & j \ne j_1, j_2, \end{cases}$$

оптимальна, поскольку при всех $p_1 \in [0,1]$

$$A(p, q^0) = l_{j_1}(p_1) q^* + l_{j_2}(p_1)(1 - q^*) = v.$$

б) $p_1^0 = 0$.

В этом случае чистая стратегия 2 первого игрока является оптимальной. Покажем, что у второго игрока также имеется чистая оптимальная стратегия. Действительно, найдется прямая l_{j_1}, проходящая через точку $(0, v)$ и имеющая угловой коэффициент $k_{j_1} \le 0$. Выбирая чистую стратегию j_1, второй игрок не позволит первому выиграть больше, чем v, поскольку $A(p, j_1) = l_{j_1}(p_1) \le v$ при всех $p_1 \in [0,1]$. Итак, матрица игры имеет седловую точку $(2, j_1)$.

в) $p_1^0 = 1$.

В этом случае, аналогичном б), матрица игры также имеет седловую точку.

Теперь рассмотрим игру с $m \times 2$-матрицей A. Смешанная стратегия $q = (q_1, 1 - q_1)$ второго игрока определяется величиной $q_1 \in [0, 1]$. Значение игры, согласно следствию теоремы 4.2 $'$, представимо в виде

$$v = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i, q) = \min_{0 \le q_1 \le 1} \max_{1 \le i \le m} [a_{i1} q_1 + a_{i2}(1 - q_1)].$$

Поэтому необходимо построить верхнюю огибающую $\max\limits_{1 \le i \le m} l_i(q_1)$ семейства прямых $l_i(q_1) = a_{i1}q_1 + a_{i2}(1 - q_1)$, $i = 1, ..., m$, и найти на отрезке [0,1] точку q_1^0 ее минимума. Она будет соответствовать оптимальной смешанной стратегии второго игрока. Оптимальная стратегия первого игрока строится с использованием уравнения, аналогичного (5.2).

11. Сведение решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.

Без потери общности будем предполагать, что значение матричной игры v положительно. Согласно следствию теоремы 4.2 $'$, оно представимо в виде

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}.$$

Введем вспомогательную переменную u и запишем задачу нахождения максимина как задачу линейного программирования

$v = \max\limits_{(u,p) \in B} u$, где

$B = \{(u, p) \mid \sum\limits_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \ge u,\ j = 1, ..., n,\ \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1, ..., m\}.$

Действительно, при фиксированном $p \in P$ максимальное значение u при ограничениях $(u, p) \in B$ равно $\min\limits_{1 \le j \le n} A(p, j)$.

Поскольку $v > 0$, можно считать, что u принимает положительные значения. Сделаем замену переменных $z_i = p_i/u$, $z = (z_1, ..., z_m)$. Тогда, учитывая ограничения $(u, p) \in B$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} z_i = 1/u, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge 1,\ j = 1, ..., n, \quad z_i \ge 0,\ i = 1, ..., m.$$

Отсюда

$$v = \max_{(u,p) \in B} u = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} z_i^0},$$

где z^0 – оптимальное решение задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \to min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \geq 1,\ j = 1, ..., n,\quad z_i \geq 0,\ i = 1, ..., m. \qquad (I)$$

По z^0 находим значение игры и оптимальную смешанную стратегию первого игрока: $v = 1/\sum\limits_{i=1}^{m} z_i^0,\ \ p^0 = vz^0.$

Аналогично можно получить, что $\quad v = \min\limits_{q\in Q} \max\limits_{1\leq i\leq m} A(i, q) = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j^0},$

где w^0 – оптимальное решение задачи линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leq 1,\ i = 1, ..., m,\quad w_j \geq 0,\ j = 1, ..., n. \qquad (II)$$

Здесь $q^0 = vw^0$ – оптимальная смешанная стратегия второго игрока. Задачи (I) и (II) двойственны одна по отношению к другой.

Отметим свойство дополняющей нежесткости для оптимальных решений z^0 и w^0 задач (I) и (II) :

$$1)\ z_i^0 > 0 \ \ \Rightarrow \ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j^0 = 1;$$

$$2)\ w_j^0 > 0 \ \ \Rightarrow \ \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i^0 = 1.$$

Оно непосредственно вытекает из утверждения теоремы 4.3 $'$ после заме ны переменных $p^0 = vz^0,\ q^0 = vw^0.$

12. Необходимые условия для пары крайних оптимальных стратегий матричной игры.

Здесь рассматривается комбинаторного типа алгоритм решения игры, основанный на переборе подматриц матрицы A.

Определение. Пусть Z – выпуклое множество евклидова пространства. Точка $z^0 \in Z$ называется *крайней точкой* множества Z, если не существует таких точек $z' \neq z'' \in Z$ и такого числа $0 < \lambda < 1$, что $z^0 = \lambda z' + (1 - \lambda) z''.$

Другими словами, крайняя точка выпуклого множества Z не является внутренней точкой никакого отрезка, соединяющего две точки этого множества. Нетрудно видеть, что крайняя точка не может быть внутренней точкой множества Z. Однако не всякая граничная точка множества Z является крайней точкой этого множества. Например, у квадрата крайними точками являются только его вершины.

Если множество Z – многогранник, то его крайние точки называются *вершинами*. Вернемся к игре с матрицей A и рассмотрим множество оптимальных смешанных стратегий первого игрока

$$P^0 = \{p^0 \in P \mid \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij} \geq v, \ \ j = 1, ..., n\},$$

где v – значение матричной игры. Нетрудно видеть, что P^0 – многогранник евклидова пространства.

Определение. *Крайней* оптимальной смешанной стратегией первого игрока будем называть вершину многогранника P^0.

Множество оптимальных смешанных стратегий второго игрока

$$Q^0 = \{q^0 \in Q \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \leq v, \ \ i = 1, ..., m\}$$

также является многогранником и его вершины – крайние оптимальные смешанные стратегии.

Теорема 5.2. Пусть в игре с матрицей $A = (a_{ij})_{m\times n}$ значение $v \neq 0$. Тогда для любой пары p^0, q^0 крайних оптимальных смешанных стратегий игроков найдется такая невырожденная подматрица $\overline{A} = (a_{i_l j_t})_{k\times k}$ матрицы A, что выполнены условия

$$\sum_{l=1}^{k} p_{i_l}^0 a_{i_l j_t} = v, \ \ t = 1, ..., k, \qquad \sum_{l=1}^{k} p_{i_l}^0 = 1, \tag{5.3}$$

$$\sum_{t=1}^{k} a_{i_l j_t} q_{j_t}^0 = v, \ \ l = 1, ..., k, \qquad \sum_{t=1}^{k} q_{j_t}^0 = 1. \tag{5.4}$$

Рассмотрим теперь алгоритм решения матричной игры. Перебираем все невырожденные $k \times k$-подматрицы $\overline{A}$ матрицы A, начиная с $k = 2$. Для каждой подматрицы A решаем системы уравнений (5.3) и (5.4). Если решения не существует или некоторые компоненты

$$p_{i_l}^0, \ l = 1, ..., k, \ \ q_{j_t}^0, \ t = 1, ..., k$$

отрицательны, то переходим к следующей подматрице $\overline{A}$. Пусть указанные компоненты решений неотрицательны. Тогда определим смешанные стратегии

$$p^0 \ : \ p_i^0 = \begin{cases} p_{i_l}^0, & i = i_l, \\ 0, & i \neq i_l; \end{cases} \quad q^0 \ : \ q_j^0 = \begin{cases} q_{j_t}^0, & j = j_t, \\ 0, & j \neq j_t. \end{cases}$$

Теперь для тройки (p^0, q^0, v) необходимо проверить условие $(*)$ теоремы 4.1$'$. Если оно выполнено, то искомое решение (p^0, q^0, v) найдено. В противном случае переходим к следующей подматрице $\overline{A}$.

13. Метод Брауна решения матричных игр.

В этом параграфе мы рассмотрим итерационный метод приближенного решения игры с матрицей A. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Требуется найти значение игры с точностью до величины ε, а также ε-максиминную и ε-минимаксную смешанные стратегии игроков.

Метод Брауна состоит в многократном фиктивном разыгрывании матричной игры, при котором игроки по определенным правилам выбирают свои чистые стратегии. Пусть за k повторений игры первый игрок r_i раз выбрал стратегию i, $i = 1, ..., m$, а второй l_j раз выбрал стратегию j, $j = 1, ..., n$. Векторы частот выбора чистых стратегий

$$p(k) = \left(\frac{r_1}{k}, ..., \frac{r_m}{k} \right), \ \ q(k) = \left(\frac{l_1}{k}, ..., \frac{l_n}{k} \right)$$

являются смешанными стратегиями игроков.

Определим итерационный процесс Брауна.

Шаг 1. Игроки выбирают произвольно стратегии i_1 и j_1.

Пусть за k повторений игры первый игрок выбрал стратегии $i_1, ..., i_k$, а второй – стратегии $j_1, ..., j_k$. При этом $p(k)$ и $q(k)$ – соответствующие векторы частот.

Шаг $k+1$. Игроки выбирают стратегии i_{k+1} и j_{k+1} из условий

$$A(i_{k+1}, q(k)) = \max_{1 \leq i \leq m} A(i, q(k)) = v_1(k),$$

$$A(p(k), j_{k+1}) = \min_{1 \leq j \leq n} A(p(k), j) = v_2(k).$$

Каждый игрок выбирает свою чистую стратегию как наилучший ответ на соответствующий вектор частот партнера. Если наилучших ответов несколько, то выбирается любой из них.

Покажем, что $v_1(k)$ и $v_2(k)$ – оценки для значения v матричной игры:

$$v_2(k) \leq v \leq v_1(k), \quad k = 1, 2, ... \tag{5.7}$$

Вернемся к методу Брауна. Сформулируем правило остановки. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Будем останавливаться на шаге k_0, когда впервые выполнено неравенство

$$v_1(k_0) - v_2(k_0) \leq \varepsilon. \tag{5.17}$$

Из (5.7) и (5.17) следует, что величины $v_1(k_0), v_2(k_0)$ приближают значение v матричной игры с точностью до ε. Покажем, что $p(k_0)$ – ε-максиминная стратегия первого игрока. Действительно,

$$\min_{1 \leq j \leq n} A(p(k_0), j) = v_2(k_0) \geq v - \varepsilon.$$

Аналогично, $q(k_0)$ –
ε-минимаксная стратегия второго игрока.

Теорема 5.3. В методе Брауна $\lim\limits_{k\to\infty} v_1(k) = \lim\limits_{k\to\infty} v_2(k) = v$, а любые предельные точки p^0, q^0 последовательностей $\{p(k)\}$, $\{q(k)\}$ являются оптимальными смешанными стратегиями игроков.

14. Решение антагонистических игр с вогнутыми функциями выигрыша.

Определение. Антагонистическая игра $\Gamma = \left\langle X, Y, F(x, y)\right\rangle$ называется игрой с *вогнутой функцией выигрыша*, если $X \subset E^m$, $Y \subset E^n$ – выпуклые компакты евклидовых пространств, функция $F(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$ и при любом $y \in Y$ она вогнута по x.

Игра Γ называется игрой с *выпуклой функцией выигрыша*, если (вместо требования вогнутости) при любом $x \in X$ функция $F(x, y)$ выпукла по y.

Теорема 6.1 (Хелли). В евклидовом пространстве E^m имеется семейство D_α, $\alpha \in \{\alpha\}$ выпуклых компактов, обладающее следующим свойством: для любых $\alpha_1, ..., \alpha_{m+1}$ $\bigcap\limits_{j=1}^{m+1} D_{\alpha_j} \neq \emptyset$. Тогда $\bigcap\limits_{\alpha\in\{\alpha\}} D_\alpha \neq \emptyset$.

Теорема 6.2. Для игры Γ с вогнутой функцией выигрыша справедливо равенство $\underline{v} = \max\limits_{x\in X} \min\limits_{y\in Y} F(x, y) = \min\limits_{\substack{y^j \in Y \\ j=1,\dots,m+1}} \max\limits_{x\in X} \min\limits_{1\leq j\leq m+1} F(x, y^j).$

Теорема 6.3. Игра Г с вогнутой функцией выигрыша имеет решение в смешанных стратегиях вида $(x^0, \psi^0, \underline{v})$, где x^0 — максиминная стратегия первого игрока,

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{m+1} q_j^0 I_{\overline{y}_j}, \quad q^0 = (q_1^0, ..., q_{m+1}^0) \in Q,$$

$$(\overline{y}_j, j = 1, ..., m+1) \in \text{Arg} \min_{\substack{y^j \in Y \\ j=1,...,m+1}} \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(x, y^j),$$

а q^0 — минимаксная стратегия в задаче

$$\min_{q \in Q} \max_{x \in X} \Phi(x, q), \quad \Phi(x, q) = \sum_{j=1}^{m+1} F(x, \overline{y}^j) q_j.$$

Теорема 5.4. Игра Г с выпуклой функцией выигрыша имеет решение в смешанных стратегиях вида $(\varphi^0, y^0, \overline{v})$, где y^0 — минимаксная стратегия первого игрока,

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^0 I_{\overline{x}_i}, \quad p^0 = (p_i^0, \ i = 1, ..., n+1) \in P,$$

$$(\overline{x}_i, \ i = 1, ..., n+1) \in \text{Arg} \max_{\substack{x^i \in X \\ i=1,...,n+1}} \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n+1} F(x^i, y),$$

а p^0 — максиминная стратегия в задаче

$$\max_{p \in P} \min_{y \in Y} \Phi^1(p, y), \quad \Phi^1(p, y) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i F(\overline{x}^i, y).$$

15. Исследование модели "оборона-нападение " в чистых стратегиях.

Имеется n обороняемых пунктов с номерами $i = 1, ..., n$ возможного прорыва средств нападения. Пусть A и B — количества средств нападения и обороны. Эти средства предполагаются бесконечно-делимыми. Стратегия первого игрока (нападения) состоит в распределении своих средств по пунктам в соответствии с вектором

$$x = (x_1, ..., x_n) \in X = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A, \quad x_i \ge 0, \ i = 1, ..., n\}.$$

Второй игрок (оборона) использует аналогичную стратегию

$$y = (y_1, ..., y_n) \in Y = \{y \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = B, \quad y_i \ge 0, \ i = 1, ..., n\}.$$

Пусть μ_i — количество средств нападения, которое может уничтожить одна единица средств обороны на i-ом пункте. Если $x_i > \mu_i y_i$, то через i-й пункт прорывается $x_i - \mu_i y_i$ средств нападения. Если $x_i \le \mu_i y_i$, то через этот пункт нападение не прорвется. Объединяя оба случая, находим формулу для количества средств нападения, прорвавшегося через i-й пункт: $\max[x_i - \mu_i y_i, 0]$. Определим функцию выигрыша первого игрока

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, 0]$$

– общее количество средств нападения, прорвавшееся через все пункты.

Заметим, что функция $F(x,y)$ выпукла по y. По теореме 6.4 значение игры $v = \overline{v}$ и минимаксная стратегия y^0 обороны оптимальна. Займемся исследованием этой игры в чистых и смешанных стратегиях. Без потери общности предположим, что коэффициенты эффективности обороны μ_i упорядочены: $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n$ и n-й пункт обороны является слабейшим.

а) Покажем, что $\underline{v} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x,y) = \max[A - \mu_n B, 0], \quad x^{(n)} = (0, ..., 0, A)$

б) Покажем, что $\quad \overline{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x,y) = \max[A - B\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\Big)^{-1}, 0],$

$y^0: \; y_i^0 = B\Big(\mu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\Big)^{-1}, \; i = 1, ..., n,$ – минимаксная стратегия обороны.

Когда в игре существует решение в чистых стратегиях?

Если $B \geq A \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}$, то $\overline{v} = 0 \geq \underline{v} \geq 0$ и, следовательно, $\overline{v} = \underline{v} = 0$. Для нападения любая стратегия оптимальна. В этом случае оборона так может распределить свои силы, чтобы не позволить нападению, использующему концентрированный удар, прорваться на каком-либо пункте.

Если $B < A \sum \frac{1}{\mu_k}$, то функция $F(x,y)$ седловой точки не имеет.

16. Исследование модели "оборона-нападение " в смешанных стратегиях.

в) Покажем, что в игре существует решение в смешанных стратегиях вида $(\varphi^0, y^0, \overline{v})$, где y^0 – чистая минимаксная стратегия обороны, а оптимальная смешанная стратегия для нападения имеет вид

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 I_{x^{(i)}}, \; p_i^0 = \Big(\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}\Big)^{-1}, \; i = 1, ..., n.$$

17. Исследование модели шумной дуэли.

В дуэли принимают участие два дуэлянта (первый и второй игроки). В начальный момент времени дуэлянты находятся на расстоянии d_0 и по команде начинают сближаться. В распоряжении каждого дуэлянта имеется один выстрел, который он может произвести в противника с любого расстояния (конечно, при условии, что дуэлянт жив), он даже может подойти к противнику вплотную.

Пусть $p_k(d)$ – функция меткости k-го дуэлянта, равная вероятности поражения противника, если выстрел был произведен с расстояния d. Предположим, что функции $p_k(d)$ непрерывны и убывают на отрезке $[0, d_0]$ и без потери общности $p_k(0) = 1,\ p_k(d_0) = 0,\ k = 1, 2$.

Определим антагонистическую игру. Пусть $x \in X = [0, d_0]$ – расстояние, с которого первый игрок намечает произвести свой выстрел. Аналогично, $y \in Y = [0, d_0]$ – расстояние, с которого намечает свой выстрел второй игрок. Определим функцию выигрыша $F(x, y)$ первого игрока.

Рассмотрим сначала *шумную дуэль*, когда противники слышат выстрелы друг друга. Тогда

$$F(x,y) = \begin{cases} p_1(x), & 0 \le y \le x \le d_0, \\ 1 - p_2(y), & 0 \le x < y \le d_0. \end{cases}$$

По смыслу $F(x, y)$ есть вероятность поражения первым игроком второго. Если $x < y$ и второй игрок промахнется, то первый, услышав выстрел противника, стреляет в него с расстояния 0 вместо x. Отметим, что $F(x, y)$ является осреднением функции, принимающей значение 1 или 0 в зависимости от того, убит второй дуэлянт или нет. Итак, шумная дуэль определена как игра в нормальной форме $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$.

Покажем, что шумная дуэль имеет решение в чистых стратегиях $(d^*, d^*, v = p_1(d^*))$, где d^* – единственный корень уравнения $p_1(d) = 1 - p_2(d)$.

В *бесшумной дуэли* игроки не слышат выстрелы друг друга и

$$F(x,y) = \begin{cases} p_1(x), & 0 \le y \le x \le d_0, \\ p_1(x)(1 - p_2(y)), & 0 \le x < y \le d_0. \end{cases}$$

бесшумная дуэль не имеет решения в чистых стратегиях.

18. Определение многошаговой антагонистической игры с полной информацией.

Определим многошаговую антагонистическую игру *с полной информацией.* Игра происходит в течение T шагов с номерами $t = 1, ..., T$. На каждом шаге t игроки выбирают по очереди альтернативы – значения переменных x_t, y_t.

Шаг 1. Сначала первый игрок выбирает альтернативу $x_1 \in U_1$, затем второй игрок, зная выбор первого, выбирает альтернативу $y_1 \in V_1(x_1) = V_1(\cdot)$.

Пусть игроки в течение $t-1$ шагов выбрали альтернативы $x_1, ..., x_{t-1}, y_1, ..., y_{t-1}$. Положим $\overline{x}_t = (x_1, ..., x_t)$, $\overline{y}_t = (y_1, ..., y_t)$.

Шаг t. Сначала первый игрок, зная предысторию $\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1}$, выбирает альтернативу $x_t \in U_t(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1}) = U_t(\cdot)$. Затем второй игрок выбирает альтернативу $y_t \in V_t(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}) = V_t(\cdot)$, зная предысторию $\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}$, включая выбор x_t первого игрока на данном шаге.

После завершения шага T возникает пара $(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$, называемая *партией* игры. По смыслу партия игры – это запись всех альтернатив, выбранных игроками. Для любой партии $(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ задается выигрыш $F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ первого игрока.

19. Теорема Цермело о решении многошаговой игры с полной информацией.

Определим теперь игру в нормальной форме. На шаге t первый игрок может выбрать альтернативу x_t как значение функции $\tilde{x}_t : \ x_t = \tilde{x}_t(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$, которая должна быть определена при всевозможных значениях аргументов $\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1}$. Обозначим множество всех таких функций $\tilde{x}_t$ через $\tilde{U}_t$. Заметим, что $\tilde{x}_1 = x_1$, поскольку на первом шаге первый игрок никакой информацией не располагает.

Стратегия первого игрока представляет собой набор функций

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_t, \ t = 1, ..., T) \in \tilde{X} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{U}_t.$$

Аналогично, на шаге t второй игрок может выбирать альтернативу y_t как значение функции $\tilde{y}_t : \ y_t = \tilde{y}_t(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1})$, которая должна быть определена при всевозможных значениях аргументов $\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}$. Обозначим множество всех таких функций $\tilde{y}_t$ через $\tilde{V}_t$. Стратегия второго игрока представляет собой набор функций

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_t, \ t = 1, ..., T) \in \tilde{Y} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{V}_t.$$

Игроки могут выбрать стратегии $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ независимо друг от друга до игры, а во время игры – применять их "автоматически."Любой паре стратегий $(\tilde{x}, \tilde{y})$ однозначно соответствует партия игры:

$x_1 = \tilde{x}_1,\ y_1 = \tilde{y}_1(x_1),\ x_2 = \tilde{x}_2(x_1, y_1)$ и т.д.

Далее $F(\tilde{x}, \tilde{y}) \overset{def}{=} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$, где $(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ – партия, соответствующая стратегиям $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Итак, многошаговая игра с полной информацией определена в нормальной форме $\Gamma = \left\langle \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) \right\rangle$.

В дальнейшем будем рассматривать два класса игр:

игра Γ', в которой все множества $U_t(\cdot), V_t(\cdot)$ конечны;

игра Γ'', в которой все множества $U_t(\cdot) \equiv U_t,\ V_t(\cdot) \equiv V_t$ не зависят от предыстории и являются компактами метрических пространств, а функция $F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ непрерывна на произведении

$$U_1 \times \cdots \times U_T \times V_1 \times \cdots \times V_T.$$

Определим пару стратегий

$$\tilde{x}^0 = (\tilde{x}^0_t, t = 1, ..., T),\ \ \tilde{y}^0 = (\tilde{y}^0_t, 1, ..., T),$$

используя метод *динамического программирования*. Доопределим функцию F на всех отрезках партии вида $(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1})$ или $(\overline{x}_t, \overline{y}_t)$ и назовем ее *функцией Беллмана*. Компоненты стратегий $\tilde{x}^0_t$, $\tilde{y}^0_t$ будем задавать в порядке, обратном выборам игроков.

Определим величину

$$\tilde{v} = \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) \overset{def\ F(x_1)}{=} \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(x_1, y_1) = ...$$

$$= \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} ... \max_{x_T \in U_T(\cdot)} \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T).$$

Теорема 8.1 (Цермело). Всякая многошаговая антагонистическая игра с полной информацией Γ' (или Γ'') имеет решение $(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0, \tilde{v})$.

20. Ситуация равновесия игры многих лиц и ее недостатки

Понятие антагонистической игры можно значительно расширить. В игре двух лиц интересы игроков необязательно бывают противоположными. Рассматривают и игры многих лиц. Им посвящена третья глава.

Определим игру двух лиц. Пусть первый игрок имеет в своем распоряжении стратегии x из множества стратегий X, а второй игрок – стратегии y из множества стратегий Y. Будем рассматривать игру в *нормальной форме.* Это означает, что каждый из игроков выбирает стратегию, не зная выбора партнера. Пару стратегий (x, y) будем называть *ситуацией*. У первого игрока имеется функция выигрыша $F(x, y)$, а у второго – функция выигрыша $G(x, y)$, определенные на множестве всех ситуаций $X \times Y$. Каждый игрок стремится, по возможности, максимизировать свою функцию выигрыша. Таким образом, игра двух лиц в нормальной форме задается набором $\Gamma = \big\langle X, Y, F(x, y), G(x, y)\big\rangle$.

В антагонистической игре понятие решения мы связывали с седловой точкой функции выигрыша первого игрока. В произвольной игре двух лиц аналогом седловой точки является понятие *ситуации равновесия*.

Определение. Ситуация (x^0, y^0) называется ситуацией равновесия (равновесием по Нэшу) игры Γ, если

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0), \quad \max_{y \in Y} G(x^0, y) = G(x^0, y^0).$$

Стратегии x^0 и y^0, составляющие ситуацию равновесия, будем называть *равновесными*. Если оба игрока придерживаются ситуации равновесия, то одному игроку от нее невыгодно отклоняться.

Обсудим, как можно использовать понятие равновесия по Нэшу с точки зрения принятия решений. В теории игр, как и во многих других теориях, можно выделить два подхода: *нормативный* и *позитивный*. Нормативный подход состоит в том, что теория дает рекомендации, как следует действовать в той или иной конфликтной ситуации. А при позитивном подходе теория пытается описать, как на самом деле происходит взаимодействие между игроками. Изначально теория игр развивалась как нормативная. И сейчас мы обсудим понятие равновесия по Нэшу именно с такой точки зрения. В этом случае правило принятия решения можно сформулировать следующим образом: в конфликтной ситуации, описываемой игрой в нормальной форме, каждому участнику следует использовать стратегию, которая входит в равновесие по Нэшу. Пози-

Определение. Игра двух лиц Γ называется биматричной, если множества стратегий игроков конечны:

$$X = \{1, ..., m\}, \quad Y = \{1, ..., n\}.$$

Здесь $i \in X$, $\ j \in Y$ – стратегии первого и второго игроков. Выигрыши игроков задаются двумя матрицами

$$A = (F(i, j))_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (G(i, j))_{m \times n} = (b_{ij})_{m \times n}.$$

Определение. Ситуация (i^0, j^0) биматричной игры Г называется ситуацией равновесия (равновесием по Нэшу), если

$$a_{ij^0} \leq a_{i^0j^0},\ i = 1, ..., m, \quad b_{i^0j} \leq b_{i^0j^0},\ j = 1, ..., n.$$

Элемент $a_{i^0j^0}$ является максимальным в j^0 столбце матрицы А, а $b_{i^0j^0}$ максимальным в i^0 строке матрицы В

Всегда ли в игре двух лиц существует ситуация равновесия? В общем случае ответ – отрицательный, поскольку, например, в антагонистической игре не всегда существует седловая точка.

\

Использование ситуаций равновесия на практике часто связывается со следующим сценарием поведения игроков. Они сначала должны договориться о ситуации равновесия, затем всякие переговоры запрещаются и игроки независимо выбирают свои стратегии, возможно нарушая принятое соглашение. Заметим, что одному игроку будет невыгодно отклоняться от своей равновесной стратегии. Если игроки придерживаются в игре такого сценария поведения, то игра Г называется *бескоалиционной*.

Определение. Ситуация (x^0, y^0) игры Г называется оптимальной по Парето, если не существует такой ситуации (x, y) что выполнены неравенства

$$F(x, y) \geq F(x^0, y^0), \ \ G(x, y) \geq G(x^0, y^0)$$

и при этом хотя бы одно из них – строгое.

Мы отметили три недостатка понятия равновесия по Нэшу:

1) равновесий по Нэшу в игре может не существовать;
2) равновесие по Нэшу может быть не единственно;
3) равновесие по Нэшу может быть неэффективно.

Но, несмотря на эти недостатки, указанное понятие играет центральную роль в теории принятия решений в конфликтных ситуациях.

21. Теорема существования ситуаций равновесия для игры многих лиц.

Приведем теорему существования ситуации равновесия в игре двух лиц, которая является обобщением теоремы 2.3. Предварительно сформулируем топологическую теорему о *неподвижной точке.*

Теорема 9.1 (Брауэр). Пусть $f : Z \to Z$ – непрерывное отображение в себя выпуклого компакта Z конечномерного евклидова пространства. Тогда у него существует неподвижная точка $z^0 : f(z^0) = z^0$.

Теорема 9.2. Пусть в игре двух лиц Γ множества X и Y – выпуклые компакты евклидовых пространств E^m и E^n. Предположим, что функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ непрерывны на $X \times Y$, функция $F(x,y)$ вогнута по x при любом фиксированном y, а функция $G(x,y)$ вогнута по y при любом фиксированном x. Тогда в игре Γ существует ситуация равновесия.

22. Метод поиска ситуаций равновесия с использованием функций наилучших ответов.

Рассмотрим метод поиска ситуации равновесия с использованием множеств наилучших ответов $X(y) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X} F(x,y)$ и $Y(x) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in Y} G(x,y)$. Он состоит в решении системы включений

$$x^0 \in X(y^0), \quad y^0 \in Y(x^0). \tag{9.1}$$

В случае, когда у игроков существуют непрерывные функции наилучшего ответа $x(y)$ и $y(x)$ (см. первую часть доказательства теоремы 9.2), система включений (9.1) эквивалентна системе уравнений
$x(y^0) = x^0$, $y(x^0) = y^0$.

Для численного решения системы включений (9.1) часто применяется *процедура нащупывания по Курно.* Она заключается в построении последовательности стратегий:

$x^1 \in X,\ y^1 \in Y(x^1),\ x^2 \in X(y^1),\ y^2 \in Y(x^2)$ и т.д.

Пусть последовательности стратегий $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ сходятся соответственно к x^0 и y^0. Тогда (x^0, y^0) – ситуация равновесия, поскольку для (x^0, y^0) справедлива система включений (9.1) (см. доказательство теоремы 2.2). Однако последовательности $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ сходятся не всегда.

23. Свойства ситуаций равновесия в смешанных стратегиях биматричных игр.

Перейдем к смешанным расширениям биматричных игр Γ, задаваемых матрицами

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}.$$

Смешанные стратегии игроков здесь такие же, как и в матричной игре: $p \in P$, $q \in Q$. Ожидаемые выигрыши игроков –

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j, \quad B(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j.$$

В результате получили смешанное расширение биматричной игры

$$\overline{\Gamma} = \left\langle P, Q, A(p,q), B(p,q) \right\rangle.$$

Ситуации равновесия игры $\overline{\Gamma}$ будем называть ситуациями равновесия в смешанных стратегиях (или смешанными равновесиями по Нэшу) исходной игры Γ.

Лемма 10.1. Для того чтобы ситуация (p^0, q^0) была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Γ, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\begin{cases} A(i, q^0) \le A(p^0, q^0), & i = 1, ..., m, \\ B(p^0, j) \le B(p^0, q^0), & j = 1, ..., n. \end{cases} \qquad (*)$$

Теорема 10.1 (свойство дополняющей нежесткости). Пусть (p^0, q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Γ. Тогда

1) $p_i^0 > 0 \;\Rightarrow\; A(i, q^0) = A(p^0, q^0)$;

2) $q_j^0 > 0 \;\Rightarrow\; B(p^0, j) = B(p^0, q^0)$.

Следствие. Пусть (p^0, q^0) – ситуация равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Γ. Тогда

1) $A(i, q^0) < A(p^0, q^0) \;\Rightarrow\; p_i^0 = 0$;

2) $B(p^0, j) < B(p^0, q^0) \;\Rightarrow\; q_j^0 = 0$.

24. Решение биматричных игр в смешанных стратегиях.

Теорема 10.2. Для того чтобы ситуация (p^0, q^0) была ситуацией равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры Γ, необходимо и достаточно, чтобы нашлись множества $X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$ и числа v_1, v_2, для которых выполнены условия

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = v_1 & \forall\, i \in X^0, \\ \sum\limits_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 \le v_1 & \forall\, i \notin X^0, \\ \sum\limits_{j \in Y^0} q_j^0 = 1,\; q_j^0 \ge 0 & \forall\, j \in Y^0, \end{cases} \quad (10.1) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2 & \forall\, j \in Y^0, \\ \sum\limits_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} \le v_2 & \forall\, j \notin Y^0, \\ \sum\limits_{i \in X^0} p_i^0 = 1,\; p_i^0 \ge 0 & \forall\, i \in X^0. \end{cases} \quad (10.2)$$

положим

$$v_1 = A(p^0, q^0),\; v_2 = B(p^0, q^0), X^0 = \{i \in X \mid p_i^0 > 0\},\; Y^0 = \{j \in Y \mid q_j^0 > 0\}.$$

Теорема 10.3′. В любой биматричной игре Γ для *некоторой* ситуации равновесия (p^0, q^0) в смешанных стратегиях найдутся такие множества $X^0 \subseteq X,\ Y^0 \subseteq Y$ и такие числа v_1, v_2, что выполнены условия (10.1), (10.2) и $|X^0| = |Y^0|$.

Рассмотрим алгоритм поиска ситуаций равновесия в смешанных стратегиях. Перебираем квадратные подматрицы

$$\overline{A} = (a_{ij})_{i \in X^0 j \in Y^0}, \quad \overline{B} = (b_{ij})_{i \in X^0 j \in Y^0}$$

и решаем системы уравнений из (10.1),(10.2). Если решения этих систем $p_i^0,\ i \in X^0,\ v_1$ и $q_j^0,\ j \in Y^0,\ v_2$ удовлетворяют неравенствам из условий 10.1 и 10.2, то, добавляя компоненты $p_i = 0,\ i \notin X^0,\ q_j = 0,\ j \notin Y^0$, получим ситуацию равновесия (p^0, q^0). Из теоремы 10.3′ вытекает, что через конечное число шагов алгоритм приводит к ситуации равновесия.

25. Решение игры Γ_1. Равновесие по Штакельбергу.

Здесь мы рассматриваем игры двух лиц, в которых игроки прежде, чем выбрать стратегии $x \in X,\ y \in Y$, предварительно обмениваются информацией о своих выборах. Такого рода игры описывают взаимодействие между верхним и нижним звеньями управления (начальником и подчиненным, центром и производителем продукции и т.п.) и называются *иерархическими*. Будем считать, что первый игрок осуществляет управление вторым игроком и делает сообщение первым.

Рассмотрим исходную игру двух лиц в нормальной форме $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$, на основе которой будем строить иерархические игры. При этом нас будет интересовать наилучший гарантированный результат (выигрыш), который может получить в игре первый игрок. В данном параграфе предполагается, что функции $F(x,y)$ и $G(x,y)$ непрерывны на произведении $X \times Y$ компактов метрических пространств.

Игра Γ_1. Первый игрок выбирает стратегию $x \in X$ и сообщает ее второму. Затем второй игрок выбирает стратегию $y \in Y$, зная x. При этом будем использовать схематичную запись $x \xrightarrow{2} y$. Смысл подобных сообщений очевиден в тех случаях, когда интересы игроков близки. Например, если вы решили с кем-нибудь встретиться, то сообщаете, куда придете. Игра Γ_1 является неантагонистической одношаговой игрой с полной информацией.

Экономическая интерпретация: первый игрок (центр) сообщает второму игроку (производителю продукции) цену x на продукцию. Второй игрок выпускает продукцию в количестве y, зная цену x.

Полезно записать игру Γ_1 в нормальной форме. Второй игрок использует стратегии вида $g : X \to Y$. Множество всех таких стратегий обозначим через $\{g\}$. Тогда

$$\Gamma_1 = \Big\langle X, \{g\}, F(x,g), G(x,g) \Big\rangle,$$

где $F(x,g) \stackrel{def}{=} F(x, g(x)),\ G(x,g) \stackrel{def}{=} G(x, g(x))$.

Найдем наилучший гарантированный результат F_1 первого игрока в игре Γ_1. Предположим, что второй игрок, зная x, выбирает

$$y \in Y(x) = \operatorname{Arg} \max_{y \in Y} G(x,y),$$

т.е. максимизирует свою функцию выигрыша $G(x,y)$. Первый игрок знает функцию выигрыша второго игрока, ему также известно, что второй будет выбирать стратегию из множества $Y(x)$, но он не знает конкретного выбора $y \in Y(x)$.

Величина $W(x) = \min\limits_{y \in Y(x)} F(x,y)$ называется *оценкой эффективности* (гарантированным результатом) стратегии x.

Заметим, что множество $Y(x)$ – непустое и является компактом. Следовательно, $\min\limits_{y \in Y(x)}$ достигается и наилучший гарантированный результат имеет вид

$$F_1 = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x,y).$$

Определение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия первого игрока x^ε называется ε-оптимальной в игре Γ_1, если $W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$.

В дальнейшем мы приведем пример, в котором $\sup\limits_{x \in X}$ не достигается. Решить игру Γ_1 – это значит найти величину F_1 и ε-оптимальную стратегию x^ε при заданном $\varepsilon > 0$.

Определим теперь *равновесие по Штакельбергу* игры Γ_1. Положим $Y^*(x) = \operatorname{Arg} \max\limits_{y \in Y(x)} F(x,y)$ – множество наилучших ответов второго игрока, благожелательных по отношению к первому.

Определение. Ситуация (x^0, y^0) называется *равновесием по Штакельбергу,* если
$$x^0 \in Arg\max_{x\in X}\max_{y\in Y(x)} F(x,y), \quad y^0 \in Y^*(x^0).$$

Здесь предполагается, что второй игрок, получив информацию о x, использует свой наилучший ответ, благожелательный по отношению к первому игроку.

26. Теорема Гермейера о решении игры Γ_2.

Игра Γ_2. Первый игрок перед выбором x имеет полную информацию об y. Он ходит первый и сообщает второму игроку стратегию вида $f : Y \to X$. Множество всех таких стратегий обозначим через $\{f\}$. Схема сообщений в игре Γ_2 : $f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$.

Экономическая интерпретация: $f(y)$ – величина премии, обещаемая центром за произведенную продукцию y.

Найдем выражение для наилучшего гарантированного результата F_2 первого игрока в игре Γ_2. Предположим, что второй игрок, зная f, выбирает y из множества $Y(f) = \mathrm{Arg}\max_{y\in Y} G(f(y), y)$. Множество $Y(f)$ может оказаться пустым, если функция f разрывна. В случае пустого $Y(f)$ будем считать, что второй игрок может выбрать любую стратегию $y \in Y$. Определим множество
$$Y^*(f) = \begin{cases} Y(f), & Y(f) \neq \emptyset, \\ Y, & Y(f) = \emptyset. \end{cases}$$
В сделанных предположениях второй игрок выбирает $y \in Y^*(f)$ и оценка эффективности стратегии f задается формулой
$$W(f) = \inf_{y\in Y^*(f)} F(f(y), y).$$
Наилучший гарантированный результат первого игрока имеет вид
$$F_2 = \sup_{f\in\{f\}} \inf_{y\in Y^*(f)} F(f(y), y).$$

Определение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия f^ε называется ε-оптимальной в игре Γ_2, если $W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$.

Поиск величины F_2 по указанной формуле весьма сложен, так как связан с решением оптимизационной задачи на множестве функций $\{f\}$. Мы далее упростим формулу для F_2 таким образом, чтобы оптимизация велась по исходным множествам X и Y.

$G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x,y)$ – наилучший гарантированный результат второго игрока при условии, что первый применяет по отношению к нему стратегию "наказания" f^{H} : $f^{\text{H}}(y) \in \text{Arg}\min_{x \in X} G(x,y) \;\; \forall\, y \in Y$;

$E = \text{Arg}\max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x,y)$ – множество максиминных стратегий второго игрока;

$D = \{(x,y) \in X \times Y \mid G(x,y) > G_2\}$;

$$K = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y) \in D} F(x,y), & D \neq \emptyset, \\ -\infty, & D = \emptyset; \end{cases}$$

$M = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x,y)$.

Теорема 11.1 (Гермейер). В сделанных предположениях наилучший гарантированный результат первого игрока в игре Γ_2 равен $F_2 = \max[K, M]$.

27. Задача многокритериальной оптимизации и условия существования парето-оптимальных стратегий.

В данной главе предполагается, что имеется одно *лицо, принимающее решение* (ЛПР), выбирающее стратегию $x \in X$. При этом возможно наличие неопределенностей.

Здесь у первого игрока имеется один критерий оценки исходов – его функция выигрыша.

имеется одно ЛПР, но стратегия $x \in X$ оценивается не скалярным, а *векторным критерием* $W(x) = (W_1(x), ..., W_s(x))$. При этом каждый *частный* критерий $W_i(x)$ желательно максимизировать. Если по смыслу этот критерий желательно минимизировать, то его можно заменить на $-W_i(x)$. Итак, неопределенность здесь выражается неясностью цели ЛПР (несколько критериев).

Задача многокритериальной оптимизации заключается в выборе $x \in X$ при наличии векторного критерия $W(x)$. Какую стратегию $x \in X$ следует выбирать ЛПР ? Ответ на этот вопрос не прост. Дело в том, что, как правило, не существует стратегии $x^0 \in Arg \max_{x \in X} W_i(x),\; i = 1, ..., s$.

При решении многокритериальных задач используют стратегии, *оптимальные по Парето*.

Определение. Стратегия $x^0 \in X$ называется оптимальной по Парето, если не существует такой стратегии $x \in X$, что $W_i(x) \geq W_i(x^0),\ i = 1, ..., s$, и хотя бы одно неравенство выполнено как строгое, т.е. $W(x) \neq W(x^0)$.

Множество всех оптимальных по Парето стратегий обозначим через $\Pi(X, W)$. В рассмотренном примере $\Pi(X, W) = \{x^1, x^3\}$. Отметим простой способ проверки оптимальности по Парето стратегии x. Пусть $Y = W(X)$ – множество векторных оценок, отвечающих всевозможным стратегиям $x \in X$. Сдвигаем неотрицательный ортант $E^s_+ = \{y \in E_s \mid y_i \geq 0,\ i = 1, ..., s\}$ евклидова пространства E^s в точку $W(x)$. Если сдвинутый ортант (включая его границы) не содержит других векторов, кроме $W(x)$, то $x \in \Pi(X, W)$. Более формально условие оптимальности по Парето для стратегии x записывается в виде $(W(x) + E^s_+) \cap Y = \{W(x)\}$.

Теорема 3.1. Пусть X – компакт метрического пространства, а частные критерии $W_i(x), i = 1, ..., s$, непрерывны на X. Тогда множество $\Pi(X, W)$ не пусто.

Доказательство. Рассмотрим следующую *свертку* векторного критерия:
$$F_1(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i W_i(x),$$
$$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s) \in \Lambda = \{\lambda \mid \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ i = 1, ..., s\}.$$

Таким образом, максимизируя свертку $F_1(\lambda, x)$, можно получать оптимальные по Парето стратегии. Но для всякого ли $x \in \Pi(X, W)\ \exists \lambda \in \Lambda : x \in X_1(\lambda)$? Ответ в общем случае отрицательный.

28. Представление множества оптимальных по Слейтеру стратегий с использованием свертки типа "минимум".

Рассмотрим другую свертку $F_2(\lambda, x) = \min\limits_{1 \leq i \leq s} \lambda_i W_i(x)$, где $\lambda \in \Lambda$. При использовании этой свертки будем предполагать, что $W_i(x) > 0,\ \forall x \in X,\ i = 1, ..., s$. Это не является ограничением общности.

Теорема 3.2.(Ю.Б.Гермейер). Пусть все частные критерии $W_i(x)$ непрерывны и положительны на компакте X метрического пространства. Тогда
$$S(X, W) = \cup_{\lambda \in \Lambda} X_2(\lambda). \tag{1}$$

К сожалению, не всегда $X_2(\lambda) \subset \Pi(X, W)$.

29. Необходимые и достаточные условия для оптимальных по Слейтеру стратегий в выпуклой многокритериальной задаче.

Другой подход состоит в аналитическом методе построения множества $\Pi(X, W)$, которое пытаются задать ограничениями вида равенств или неравенств. Такой подход основан на использовании условий, которым должны удовлетворять оптимальные по Парето или Слейтеру стратегии. Приведем пример таких условий для случая вогнутых критериев на выпуклом компакте евклидова пространства E^n.

Определение. Пусть $x^0 \in X$. Говорят, что вектор $\alpha \in E^n$ задает в точке x^0 направление, допустимое для множества X, если найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $x^0 + \varepsilon x \in X$ для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

По смыслу, двигаясь из точки x^0 в направлении α, мы некоторое время будем оставаться в множестве X. Множество всех допустимых в точке x^0 направлений обозначим через $\mathcal{L}(x^0)$.

Для x^0, внутренней точки множества X, любое направление является допустимым. Для граничной точки круга на плоскости допустимо любое направление, ведущее внутрь круга. Касательное направление допустимым не является.

Теорема 3.3. Пусть все частные критерии $W_i(x),\ i = 1, ..., s$ вогнуты и непрерывно дифференцируемы на выпуклом компакте X евклидова пространства. Тогда для того, чтобы $x^0 \notin S(X, W)$ необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое допустимое направление $\alpha \in \mathcal{L}(x^0)$, что

$$(W_i'(x^0), \alpha) > 0,\ i = 1, ..., s. \tag{2}$$

Поэтому для строго вогнутых критериев теорема 3.3 дает необходимые и достаточные условия для оптимальных по Парето стратегий.

30. Задача принятия решения при наличии бинарного отношения.

Определение. Бинарным отношением R на множестве X называется подмножество $R \subset X \times X$.

Бинарное отношение R здесь интерпретируется следующим образом: если $(x, x') \in R$, то для ЛПР стратегия x лучше стратегии x' (или не хуже, чем x'). Вместо $(x, x') \in R$ обычно используют более простую запись xRx'. Если $(x, x') \notin R$, то будем писать $x\overline{R}x'$.

Бинарное отношение называется:

а) рефлексивным, если $xRx \ \forall x \in X$;

б) антирефлексивным, если $xRx \ \forall x \in X$;

в) симметричным, если $xRy \Rightarrow yRx \ \forall x, y \in X$;

г) асимметричным, если $xRy \Rightarrow y\overline{R}x \ \forall x, y \in X$;

д) транзитивным, если $xRy, yRz \Rightarrow xRz \ \forall x, y, z \in X$;

г) ацикличным, если $\nexists x^1, ..., x^k \in X : x^1Rx^2R...Rx^kRx^1$.

Рассмотрим примеры. R – бинарное отношение сравнения стратегий по векторному критерию в нестрогом смысле (по Парето) или в строгом смысле (по Слейтеру). Это транзитивные, асимметричные отношения.

Определение. Множество

$$C(X, R) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx\} \tag{1}$$

называется ***ядром*** бинарного отношения R.

По смыслу если $x' \in C(X, R)$ и x не хуже, чем x', то и x' не хуже, чем x.

Если бинарное отношение R асимметрично, то ядру можно дать эквивалентное, более удобное определение:

$$C(X, R) = \{x' \in X \mid \ \nexists \, x \in X : xRx'\}. \tag{2}$$

В качестве приложения общей задачи принятия решений поставим задачу сокращения множества оптимальных по Парето стратегий $\Pi(X, W)$ на основе экспертной информации. Подход был предложен В.В.Подиновским.

31. Метод сужения множества парето-оптимальных стратегий на основе информации о сравнительной важности или равноценности критериев.

Теперь проведем необходимую формализацию. Будем говорить, что частные критерии $W_i(x)$ и $W_j(x)$ однородны, если $\max\limits_{x \in X} W_i(x) = \max\limits_{x \in X} W_j(x)$ и $\min\limits_{x \in X} W_i(x) = \min\limits_{x \in X} W_j(x)$, то есть критерии $W_i(x)$ и $W_j(x)$ имеют одинаковые диапазоны изменения.

Если критерии $W_i(x)$ и $W_j(x)$ не являются однородными и не являются константами, то их можно сделать однородными, заменив критерий $W_j(x)$ на критерий $\alpha W_j(x) + \beta$, где $\alpha > 0$ и β соответствующим образом подобранные константы.

Пусть $I = \{1, ..., s\}$ – множество номеров критериев. Информация от ЛПР о сравнительной важности или равноценности критериев задана множествами $A_1, A_2 \subset I \times I$. Здесь A_1 – множество пар (r, t) номеров равноценных критериев, A_2 – множество таких пар (r, t), что критерий $W_r(x)$ важнее критерия $W_t(x)$. A_1 и A_2 можно рассматривать как бинарные отношения на

$I: A_1$ – отношение равноценности критериев, а A_2 – отношение их строгого предпочтения. Естественно предположить, что отношение A_1 симметрично и транзитивно, отношение A_2 асимметрично и транзитивно. Информация, выраженная в бинарных отношениях A_1 и A_2, должна быть непротиворечивой в том смысле, что нельзя построить цепочку вида $rB_1tB_2...B_kr$, где $B_i = A_1$ или A_2 и не для всех i $B_i = A_1$. Например, если информация непротиворечива, то нельзя построить цепочку вида $1A_12A_23A_11$.

Непротиворечивость экспертной информации можно задать следующим способом. Определим на множестве I бинарное отношение: $r\Phi t$ выполнено только в том случае, когда существует цепочка $i_0B_1i_1B_2....B_ki_k$, где $i_0 = r,\ i_k = t$, а каждое бинарное отношение $B_l,\ l = 1, ..., k$, равно либо A_1, либо A_2 и среди них есть по крайней одно отношение A_2. Нетрудно видеть, что бинарное отношение Φ транзитивно. Непротиворечивость информации состоит в том, что бинарное отношение Φ антирефлексивно.

В евклидовом пространстве E^s векторных оценок $y = W(x)$ определим следующие бинарные отношения.

Отношение Парето –

$$P = \{(y, y') \in E^s \times E^s \mid y_i \geq y'_i,\ i = 1, ..., s,\ y \neq y'\}.$$

Для пары $(r, t), r \neq t$ и вектора y введем вектор y^{rt}, полученный из y перестановкой r-й и t-й компонент.

Пусть rA_1t. Определим бинарное отношение S_{rt} на $E^s : yS_{rt}z \Leftrightarrow z = y^{rt}$. Если критерии W_r и W_t равноценны для ЛПР, то и векторные оценки y и z равноценны для него при $yS_{rt}z$.

Пусть rA_2t. Определим бинарное отношение $T_{rt} : yT_{rt}z \Leftrightarrow z = y^{rt},\ y_r > y_t$. По смыслу если r-й критерий предпочтительней t-го, то оценка y предпочтительней для ЛПР оценки z, поскольку по более предпочтительному критерию значение больше в оценке y.

Определим, наконец, результирующее бинарное отношение $R : yRy'$, если существует такая последовательность $z^0, z^1, ..., z^k$, что $y = z^0,\ y' = z^k$ и $z^0H_0z^1H_1 \ldots H_{k-1}z^k$, где бинарные отношения $H_i \in \{P,\ S_{rt} : rA_1t,\ T_{rt} : rA_2t\}$ и при этом не все $H_l = S_{rt}$. В этом случае будем говорить, что последовательность $z^0, z^1, ..., z^k$ связывает векторные оценки y и y'

Лемма 1. Бинарное отношение R – транзитивное и ацикличное.

Пусть $\Pi(X, W) = \{x^1, ..., x^m\}$ и $\Pi(Y) = \{y^i = W(x^i),\ i = 1, ..., m\}$ – соответствующие векторные оценки. Задачу сужения множества $\Pi(X, W)$ можно сформулировать так: требуется найти ядро $C(\Pi(Y), R)$ бинарного отношения R на множестве $\Pi(Y)$. Поскольку отношение R ациклично и транзитивно, а множество $\Pi(Y)$ конечно, то ядро $C(\Pi(Y), R)$ не пусто.

Основная задача здесь состоит в следующем. Для двух векторных оценок y и y' требуется выяснить, связаны ли они отношением R. В частных случаях эта задача решается несложно. Рассмотрим примеры.

1. Пусть все частные критерии равноценны, т.е. $A_1 = I \times I$, а $A_2 = \emptyset$. Чтобы сравнить векторные оценки y и y', нужно сначала упорядочить их компоненты, а потом сравнить их по Парето. Более формально, определим вектор $\theta(y) \in E^s$, образованный из компонент вектора y, расположенных в порядке убывания:

$$\theta_1(y) \geq \theta_2(y) \geq ... \geq \theta_s(y).$$

Здесь $\theta_1(y) = \min\limits_{1 \leq i \leq s} y_i$ – наибольшая компонента вектора y, а $\theta_s(y) = \max\limits_{1 \leq i \leq s} y_i$ – наименьшая.

Лемма 2. Если yPy', то $\theta(y)P\theta(y')$.

Утверждение. Если $A_1 = I \times I$, то yRy' выполнено тогда и только тогда, когда $\theta(y)P\theta(y')$.

32. Задача сравнения управляемых динамических объектов

Динамический объект задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = f(z, u, x),\ z(t_0) = z^0, \tag{1}$$

где $z \in Z(x) = \{z \in E^m \mid g_j(z) \leq w_j(x),\ j = 1, ..., l\}$ – вектор фазовых переменных, $x \in X$ – вектор конструктивных параметров (стратегия ЛПР) и $u \in U$ – управление.

К такому классу объектов относятся летательный аппарат, робот-манипулятор, электрическая цепь и т.п. Возникает вопрос, как сравнить два варианта x и x' конструкций динамической системы?

Пусть H – множество в E^m. Обозначим через $\mathrm{conv}H$ выпуклую оболочку множества H, т. е. пересечение всех выпуклых множеств из E^m, содержащих множество H. Выпуклая оболочка $\mathrm{conv}H$ представляет собой совокупность всевозможных выпуклых комбинаций вида $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j z^j$, где

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ z^j \in H,\ j = 1, ..., k.$$

Справедливо следующее утверждение: выпуклая оболочка компакта в E^m является выпуклым компактом.

Рассмотрим множество

$$G(x, z) = \mathrm{conv} f(z, U, x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{conv}\{f \in E^m \mid f = f(z, u, x),\ u \in U\}$$

– выпуклую оболочку *векторограммы* $f(z, U, x)$ правой части системы (1). В дальнейшем предполагается, что функция $f(z, u, x)$ непрерывна, а U – компакт евклидова пространства. Тогда векторограмма $f(z, U, x)$ – компакт, а $G(x, z)$ – выпуклый компакт в E^m.

Определим бинарное отношение

$$xRx' \Leftrightarrow G(x, z) \supset G(x', z),\ \forall\ z \in Z(x') \subset Z(x'). \tag{2}$$

Интуитивно ясно, что объект x обладает бóльшими динамическими возможностями, чем объект x'. Это означает, что управляя объектом x, можно получить более широкое множество траекторий, чем управляя объектом x'.[1]

33. Математическая модель операции.

В этом и следующем параграфах излагается подход Ю.Б. Гермейера к построению и исследованию математических моделей *операций.* Здесь сохранены обозначения, использованные в книге Ю.Б. Гермейера.

Операция – это совокупность мероприятий, направленных на достижение некоторой цели. Совокупность лиц (или одно лицо), стремящихся в операции к поставленной цели называется *оперирующей стороной.* В операции могут участвовать другие лица, например противники, преследующие собственные цели, не совпадающие с целью оперирующей стороны. Внутри оперирующей стороны выделяется лицо, называемое *исследователем операции.* Исследователь операции преследует ту же цель, что и оперирующая сторона. Однако, он не принимает окончательных решений. Его задача состоит в формировании и изучении математической модели операции и выработке рекомендаций по выбору способов действий (стратегий).

Оперирующая сторона для достижения цели операции использует *активные средства (ресурсы).* В качестве ресурсов могут выступать деньги, сырье, запасы продукции и т.п.

Контролируемые факторы – это величины, выбор значений которых определяет действие оперирующей стороны в рассматриваемой операции. Обычно имеется вектор контролируемых факторов $x \in M_0$. Здесь M_0 – множество всевозможных значений, которые вектор x может принимать в процессе проведения операции. Выбор оперирующей стороной контролируемых факторов обычно осуществляется во времени. При этом поступающая информация об обстановке, в которой происходит операция, может существенно расширять возможности выбора контролируемых факторов. Если вообще никакой информации не поступает или поступающая информация не учитывается, то оперирующая сторона может выбрать и реализовать любой вектор $x \in M_0$. Векторы $x \in M_0$ будем называть стратегиями-константами. Рассмотрим примеры.

Неконтролируемые факторы это величины, влияющие на исход операции, но выбор значений которых не находится в распоряжении оперирующей стороны. Неконтролируемые факторы делятся на *неопределенные* и *случайные.* Неопределенные факторы это такие неконтролируемые факторы, для которых известна лишь область их возможных значений. Пусть y – вектор неопределенных факторов, $y \in N_0$, где N_0 – множество всех возможных значений для y. Однако, оперирующая сторона обычно предполагает, что вектор y принадлежит некоторой *области неопределенности* $N \subset N_0$. Например, при анализе шахматной партии можно исключить заведомо глупые ходы противника. Риск, связанный с предположением $y \in N$ должна взять на себя оперирующая сторона. Неопределенные факторы делятся на следующие:

а) контролируемые факторы противника (его стратегии),

б) природные непределенности,

в) факторы, характеризующие неясность цели оперирующей стороны.

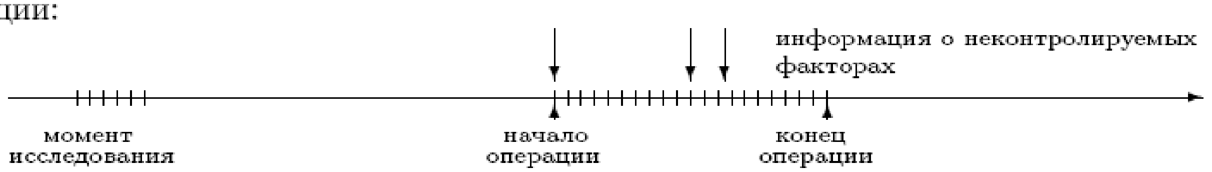
Случайные факторы это случайные величины, влияющие на исход операции. Вектор случайных факторов обозначим через $z \in Z$. Пусть θ – закон распределения для z. Он может быть точно не известен, а известно лишь, что $\theta \in \Theta$. Множества Θ встречаются двух основных видов:

1) $\Theta = \{\theta_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{L}\}$. Здесь тип закона распределения известен (нормальный, экспоненциальный и т.п.), но параметр α, определяющий конкретный закон, точно не известен.

2) $\Theta = \{\theta_\alpha \mid \underline{a}_i \le \int\limits_Z a_i(z) d\theta(z) \le \overline{a}_i,\ i = 1, ..., l\}$. Тип закона распределения неизвестен, но известны ограничения на его интегральные характеристики. Например, если $z \in E^1,\ a_i(z) = z^i$, то Θ задает ограничения на моменты случайной величины z.

Критерий эффективности. Исход операции будем отождествлять с тройкой $(x, y, z) \in M_0 \times N \times Z$. Степень соответствия исхода операции поставленной цели задают с помощью критерия эффективности $F(x, y, z)$ – функции, определенной на $M_0 \times N \times Z$. Критерий эффективности математически задает цель операции. Будем считать, что оперирующая заинтересована в увеличении значения $F(x, y, z)$. Пример критерия эффективности – функция выигрыша $F(x, y)$ первого игрока в антагонистической игре.

Стратегия. Модель операции исследуется до ее проведения. Будем условно говорить о *моменте исследования,* предшествующем началу операции:



Во время проведения операции поступает информация о неконтролируемых факторах. *Информационная гипотеза* – это точное описание поступления этой информации.

Стратегия это выбор значений контролируемых факторов в зависимости от поступающей информации о неконтролируемых факторах. Математически стратегия задается функцией $\tilde{x} : N \times Z \to M_0$. Пусть M – множество стратегий, отвечающих информационной гипотезе. Стратегия выбирается до начала операции в момент исследования.

Окончательно модель операции задается набором объектов:

$$F(x, y, z),\ x \in M_0,\ y \in N \subset N_0,\ z \in Z,\ \theta \in \Theta,\ \tilde{x} \in M.$$

34. Оценка эффективности стратегии /в том числе смешанной/ в операции.

Как сравнивать стратегии? Какие стратегии в операции следует считать оптимальными? Подход Ю.Б.Гермейера состоит в следующем. Сначала для каждой стратегии $\tilde{x} \in M$ определяется *оценка эффективности* $W(\tilde{x})$ на основе принципа *гарантированного результата*. По смыслу $W(\tilde{x})$ – некоторая гарантированная величина критерия.

Определение. Стратегия $\tilde{x}^0 \in M$ называется *оптимальной*, если $W(\tilde{x}^0) = \max_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} F_\Gamma(M)$. Последняя величина называется *наилучшим гарантированным результатом.*

Выведем формулу для оценки эффективности стратегии. Сделаем следующие предположения. Пусть y – либо природная неопределенность, либо стратегия противника, не знающего реализации случайной величины z. Интересы противника либо противоположны интересам оперирующей стороны, либо не известны. Оперирующая сторона разрешает осреднение критерия по случайностям, т.е. использование осредненного критерия

$$\overline{F}(\tilde{x},y,\theta)\overset{def}{=}\int\limits_Z F(\tilde{x}(y,z),y,z)d\theta(z).$$

Тогда оценка эффективности имеет вид

$$W(\tilde{x})=\inf_{y\in N}\inf_{\theta\in\Theta}\int\limits_Z F(\tilde{x}(y,z),y,z)d\theta(z)=\inf_{y\in N}\inf_{\theta\in\Theta}\overline{F}(\tilde{x},y,\theta). \tag{1}$$

Итак, сначала производится осреднение критерия эффективности $F(\tilde{x}(y,z),y,z)$ по θ, а потом берется нижняя грань по оставшимся неопределенностям y и θ. Это пример использования принципа гарантированного результата. Отметим, что если бы противник знал реализацию случайной величины z, то формула для оценки эффективности была бы другой:

$$W'(\tilde{x})=\inf_{\theta\in\Theta}\int\limits_Z \inf_{y\in N}F(\tilde{x}(y,z),y,z)d\theta(z).$$

Действительно, в худшем случае противник знает стратегию $\tilde{x}$ и в состоянии найти $\inf\limits_{y\in N}F(\tilde{x}(y,z),y,z)$ при известном ему z.

Покажем, что

$$W(\tilde{x})\geq W'(\tilde{x}).$$

Перейдем к использованию смешанных стратегий. Предположим, что не ожидается никакой информации о неконтролируемых факторах. В этом случае оперирующая сторона использует стратегии-константы $\tilde{x}=x\in M=M_0$. Если наилучший гарантированный результат $F_\Gamma(M_0)$ ее не устраивает, то можно использовать смешанные стратегии. Напомним, что смешанная стратегия φ есть вероятностное распределение на M_0. Определим условия применения смешанной стратегии. К сформулированным выше предположениям добавим еще одно: противник не должен знать реализации $x\in M_0$. Тогда оценка эффективности смешанной стратегии φ имеет вид

$$W(\varphi)=\inf_{y\in N}\inf_{\theta\in\Theta}\int\limits_Z\int\limits_{M_0}F(x,y,z)d\varphi(x)d\theta(z). \tag{2}$$

Если бы противник знал реализацию z, то формула была бы другой

$$W'(\varphi)=\inf_{\theta\in\Theta}\int\limits_Z\inf_{y\in N}\int\limits_{M_0}F(x,y,z)d\varphi(x)d\theta(z).$$

Величина $F_c=\sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}}W(\varphi)$ является наилучшим гарантированным результатом в смешанных стратегиях.

35. Вид наилучшего гарантированного результата в случае, когда во множестве стратегий существуют абсолютно-оптимальные стратегии.

Задача поиска величины $F_\Gamma(M)$ непростая, поскольку она состоит в максимизации $W(\tilde{x})$ на множестве функций M. Эта задача упрощается, если во множестве стратегий M содержатся *абсолютно оптимальные стратегии.* До конца этого параграфа будем предполагать известным закон распределения случайных факторов θ.

Определение. Стратегия $\tilde{x}_a \in M$ называется абсолютно оптимальной, если

$$\overline{F}(\tilde{x}_a, y, \theta) = \max_{\tilde{x}\in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta)\ \forall\ y \in N.$$

Теорема 3.4. Пусть существует абсолютно оптимальная стратегия $\tilde{x}_a \in M$. Тогда $\tilde{x}_a$ – оптимальная стратегия и

$$F_\Gamma(M) = \inf_{y\in N} \max_{\tilde{x}\in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta).$$

36.Вывод неравества F0г ?Fc ?Fи ? .Достаточные условия равенств F0г =Fc и Fc =Fи .

Теорема 3.5. Справедливы неравенства

$$F_\Gamma^0 \le F_c \le F_И \le \tilde{F}.$$

Предположим, что случайный фактор z отсутствует, M_0 и N – параллелепипеды евклидовых пространств, а критерий $F(x, y)$ непрерывен на $M_0 \times N$. Тогда, если F вогнут по x, то $F_\Gamma^0 = F_c$, а если F является выпуклым по y, то $F_c = F_И$.

Пусть случайный фактор z отсутствует. Рассмотрим непрерывную игру $\Gamma = \left\langle M_0, N, F(x, y)\right\rangle$, в которой

$$F_\Gamma^0 = \underline{v} = \max_{x\in M_0} \min_{y\in N} F(x, y),\ F_c = \max_{\varphi\in\{\varphi\}} \min_{y\in N} \int\limits_{M_0} F(x, y) d\varphi(x) = v$$

– значение игры, $F_И = \overline{v} = \min_{y\in N} \max_{x\in M_0} F(x, y)$. Теперь все утверждения вытекают из теорем 1.14, 1.15. ■

Результатам доказанной теоремы можно придать информационный смысл. Величину $Ц_П = F_c - F_\Gamma^0$ можно рассматривать как ценность информации противника о значении x. Покажем, что если противник знает x, то оперирующая сторона обеспечивает себе результат F_Γ^0. Оценка эффективности любой смешанной стратегии φ

$$W(\varphi) = \int\limits_{M_0} \min_{y \in N} F(x,y) d\varphi(x)$$

не превосходит

$$\max_{x \in M_0} \min_{y \in N} F(x,y) = F^0_\Gamma.$$

Поэтому в этом случае применение смешанных стратегий не имеет смысла, а использование чистых стратегий позволяет получить F^0_Γ. Если, наоборот, реализация значения x противнику неизвестна, то оперирующая сторона может получить результат F_c. Если критерий $F(x,y)$ вогнут по x, то $Ц_П = 0$ и противнику не имеет смысла добиваться информации о x.

Аналогично величину $Ц_o = F_И - F_c$ можно рассматривать как ценность информации оперирующей стороны о значении y. Действительно, если информация о неопределенном факторе y ожидается, то оперирующая сторона получает результат $F_И$, а в противном случае – F_c. Если критерий $F(x,y)$ является выпуклым по y, то $Ц_o = 0$ и оперирующей стороне не имеет смысла добиваться информации об y.

37. Теорема о производной по направлению функции минимума и вытекающее из нее необходимое условие для максиминной стратегии.

Рассмотрим операцию без случайных факторов и множеством стратегий $M = M_0$. В этом случае оптимальная стратегия $x^0 \in M_0$ является максиминной:

$$W(x^0) = \max_{x \in M_0} W(x), \text{ где } W(x) = \min_{y \in N} F(x,y).$$

Найдем необходимые условия для максиминных стратегий и обсудим метод их поиска. Необходимые условия будут использовать формулу для производной по направлению функции минимума $W(x)$.

Напомним определение производной по направлению функции многих переменных. Пусть в евклидовом пространстве E^m задана функция $h(x)$. Возьмем вектор $\alpha \in E^m$, задающий направление в E^m.

Определение. Величина

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{h(x+\varepsilon\alpha) - h(x)}{\varepsilon} \overset{def}{=} \frac{dh(x)}{d\alpha}$$

называется производной функции $h(x)$ по направлению α в точке x.

Как известно из курса математического анализа, если функция $h(x)$ дифференцируема в E^m, то

$$\frac{dh(x)}{d\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h'_{x_i}(x) = (\alpha, h'(x))$$

– скалярное произведение вектора α на градиент $h'(x)$ в точке x.

Функция $h(x)$ может не быть дифференцируемой в точке x^0, но иметь в этой точке производную по направлению.

Теорема 3.6. Пусть $x \in D \subset E^m$, где D – открытое множество в E^m, а y принадлежит метрическому компакту N. Предположим, что функции $F(x,y), F'_{x_i}(x,y),\ i = 1,...,m$ определены и непрерывны на $D \times N$. Тогда в любой точке $x \in D$ по любому направлению $\alpha \in E^m$ существует производная функции минимума $W(x)$, которая имеет вид

$$\frac{dW(x)}{d\alpha} = \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x,y), \qquad (1)$$

где $N(x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in N} F(x,y)$.

Следствие теоремы 3.6. Пусть M_0 – выпуклый компакт в E^m, а $\mathcal{L}(x^0)$ – множество допустимых направлений в точке $x^0 \in M_0$,

е $x^0 \in M_0$ – максиминная стратегия. Тогда в условиях теоремы 3.6 выполнено следующее необходимое условие:

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{L}(x^0)} \min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x^0,y) \le 0. \qquad (4).$$

38. Необходимые условия оптимальности для максиминной стратегии из отрезка и следствия.

Теорема 3.7. Пусть функции $F(x,y), F'_x(x,y)$ непрерывны на множестве $D \times N$, где D – интервал, содержащий отрезок $M_0 = [a,b]$, а N – компакт метрического пространства. Тогда для максиминной стратегии $x^0 \in M_0$ выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

а) $x^0 = a$ или $x^0 = b$;

б) найдутся $y^1 \neq y^2 \in N(x^0) = \operatorname{Arg}\min_{y \in N} F(x,y)$;

в) $N(x^0) = \{y^1\}$ и $F'_x(x^0,y^1) = 0$.

Замечание. Теорема обобщает необходимые условия для точки максимума x^0 дифференцируемой функции на отрезке: либо точка x^0 является концом отрезка, либо производная функции в точке x^0 равна нулю.

Следствие. Пусть в условиях теоремы 3.7

$$N = \{y \in E^n \mid c_j \le y_j \le d_j,\ j = 1, ..., n\}$$

– параллелепипед евклидова пространства E^n, в любой точке которого существуют производные $F'_{y_j}(x, y),\ j = 1, ..., n$. Тогда для максиминной стратегии $x^0 \in M_0 = [a, b]$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

1) $\exists\, y^1 \in N(x^0)$:

$$F'_x(x^0, y^1)(x^0 - a)(x^0 - b) =$$

$$= F'_{y_j}(x^0, y^1)(y^1_j - c_j))(y^1_j - d_j) = 0,\ j = 1, ..., n. \tag{5}$$

2) $\exists\, y^1 \ne y^2 \in N(x^0)$:

$$F(x^0, y^1) = F(x^0, y^2),\ \ F'_{y_j}(x^0, y^1)(y^1_j - c_j)(y^1_j - d_j) =$$

$$= F'_{y_j}(x^0, y^2)(y^2_j - c_j)(y^2_j - d_j) = 0,\ j = 1, ..., n. \tag{6}$$

39. Принцип уравнивания Гермейера.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые задачи оптимального распределения ресурсов. Будут сформулированы условия оптимальности, а также указаны алгоритмы поиска оптимальных распределений ресурсов.

Пусть $i = 1, ..., n$, – номера n пунктов, по которым оперирующая сторона распределяет ресурс. Через $f_i(t)$ обозначим функцию, определяющую эффект от вложения ресурса в количестве t в i-й пункт. Вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ задает стратегию распределения ресурса. При этом на i-й пункт направляется ресурс в количестве x_i.

Будем рассматривать два вида задач: непрерывные, где ресурс предполагается бесконечно-делимым, и дискретные, где ресурс – штучный, а A и x_i – целые числа. Для непрерывной задачи множество стратегий имеет вид

$$M_0 = \{x \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \ge 0,\ i = 1, ..., n\},$$

а для дискретной –

$$M'_0 = \{x \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \ge 0,\ x_i \in \mathcal{Z},\ i = 1, ..., n\},$$

где $\mathcal{Z}$ – множество целых чисел.

Рассмотрим следующую непрерывную задачу:

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0). \qquad (I)$$

По смыслу оперирующая сторона стремится максимизировать свертку вида $\min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i)$, т.е. минимальный эффект от вложения ресурса. Это отвечает социалистическому принципу: "чтобы не было бедных". Максиминную стратегию x^0 будем называть *оптимальным распределением ресурса.*

Задачу (I) будем рассматривать в предположении, что все функции $f_i(t)$ непрерывны и возрастают на отрезке $[0, A]$. Кроме того, без потери общности будем считать, что

$$f_1(0) \le f_2(0) \le ... \le f_n(0).$$

Будем условно говорить, что первый пункт является слабейшим: если пунктам не выделяется ресурс, то эффект на первом пункте будет наименьшим.

Теорема 3.8. (принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера). В сделанных предположениях пусть x^0 – оптимальное распределение ресурса в задаче (I). Тогда для x^0 выполнено следующее необходимое и достаточное условие: найдется такое целое $k,\ 1 \le k \le n$, что

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0),\ i = 1, ..., k-1, \\ x_i^0 = 0,\ i = k+1, ..., n. \end{cases} \qquad (1)$$

Если $f_1(0) = f_2(0) = ... = f_n(0)$, то $k = n$. Во всех случаях оптимальное распределение ресурса x^0 единственно.

Замечание. Оптимальное распределение ресурса предполагает его выделение нескольким слабым пунктам с выравниванием эффекта по этим пунктам.

Рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения ресурса. Берем последовательно $k = n, n-1, ..., 1$ и решаем систему уравнений

$$f_i(x_i^0) = C,\ i = 1, ..., k,\ x_i^0 = 0,\ i = k+1, ..., n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^0 = A \qquad (3)$$

относительно неизвестных $C, x_1^0, ..., x_n^0$. Если полученное решение имеет неотрицательные компоненты x_i^0 и при $k < n$ выполнено неравенство $C < f_{k+1}(0)$, то x^0 – оптимальное распределение ресурса. В противном случае уменьшаем значение k и вновь решаем систему.

40. Условия оптимальности и алгоритм для задачи дискретного максимина.

Перейдем теперь к задаче дискретного максимина:

$$\max_{x \in M_0'} \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*). \qquad (I)'$$

Здесь $f_i(t)$ – возрастающие функции целого аргумента.

Положим $I = \{1, ..., n\}$ и для $x \in M_0'$ определим множество

$$I(x) = \operatorname{Arg}\min_{i \in I} f_i(x).$$

Обозначим через $|I(x)|$ число элементов множества $I(x)$.

Теорема 3.9. Пусть x^* – такое оптимальное распределение ресурсов задачи $(I)'$, при котором величина $|I(x^*)|$ минимальна среди всех оптимальных распределений. Тогда необходимо выполнено условие:

$$\text{если } x_j^* > 0, \text{ то } \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \ge f_j(x_j^* - 1). \qquad (3)$$

Условие (3) является достаточным условием оптимальности.

Замечание. Условие (3) показывает, что при положительной компоненте x_j^* величина $f_j(x_j^*)$ близка к $\min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$. Это дискретный аналог принципа уравнивания.

Рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения задачи $(I)'$. Пусть $x^{(1)}$ – произвольное распределение ресурса. Допустим, что алгоритм проработал до k-го шага и мы получили распределение $x^{(k)}$. Если для $x^{(k)}$ выполнено условие (3), то по теореме 3.9 оно и будет искомым оптимальным распределением. Допустим, что для $x^{(k)}$ условие (3) не выполнено. Тогда найдется такой номер j, что $x_j^{(k)} > 0$ и $f_j(x_j^* - 1) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$. Определим новое распределение $x^{(k+1)} = z$, как это сделано в доказательстве теоремы 3.9. При этом нужно заменить x^* на $x^{(k)}$. Могут возникнуть два случая:

1) $I(x^{(k)}) = \{l\}$. Тогда

$$\min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k)}).$$

2) $|I(x^{(k)})| > 1$. Тогда

$$\min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k+1)}) = \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k)}), \text{ но } |I(x^{(k+1)})| < |I(x^{(k)})|.$$

Таким образом, на каждом шаге алгоритма либо увеличивается значение функции минимума, либо сокращается множество $I(x^{(k)})$. Отсюда следует, что алгоритм закончит работу через конечное число шагов, поскольку множество M_0' содержит конечное число элементов.

41. Лемма Гиббса. Задача поиска объекта.

Рассмотрим еще одну непрерывную задачу:

$$\max_{x \in M_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0). \qquad (II)$$

Пример интерпретации задачи. Инвестор распределяет капитал A по n проектам, где $f_i(t)$ – прибыль, получаемая от вложения капитала t в i-й проект. В отличие от задачи (I), функции $f_i(t)$ необязательно возрастающие. Предположим, что они дифференцируемы на отрезке $[0, A]$.

Теорема 3.10.(Лемма Гиббса). Пусть x^0 – оптимальное распределение ресурса в задаче (II). Тогда найдется такое число λ, что выполнено следующее необходимое условие:

$$\begin{cases} f_i'(x_i^0) = \lambda, \ x_i^0 > 0, \\ f_i'(x_i^0) \le \lambda, \ x_i^0 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Если функции $f_i(t)$ вогнуты, то (1) является достаточным условием оптимальности. Если дополнительно известно, что функции $f_i(t)$ дважды дифференцируемы и

$$f_1'(0) \ge f_2'(0) \ge ... \ge f_n'(0), \ f_i''(0) < 0, \ i = 1, ..., n,$$

то найдется такой номер l, что

$$x_i^0 > 0, \ i = 1, ..., l, \ x_i^0 = 0, \ i = l + 1, ..., n.$$

Пример. Задача поиска объекта.

Объект прячется в n возможных областях с номерами $i = 1, ..., n$. Если он находится в i-ой области и поиск в ней ведется в течение времени t, то условная вероятность его обнаружения равна $1 - e^{-\mu_i t}$, где $\mu_i > 0$. Обозначим через p_i известную априорную вероятность нахождения объекта в i-й области. Пусть A – общее время поиска объекта. Стратегия поиска $x = (x_1, ..., x_n) \in M_0$ означает, что объект в области i ищется в течение времени x_i. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1 - e^{-\mu_i x_i})$ – полная вероятность обнаружения объекта, которую необходимо минимизировать.

42. Критерий Гросса и алгоритм для задачи выпуклого целочисленного программирования.

Рассмотрим дискретный аналог задачи (II) :

$$\max_{x \in M_0'} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) \qquad (II)'.$$

Здесь $f_i(t)$ – возрастающие функции целого аргумента. Пусть, кроме того, выполнено следующее условие вогнутости:
если $x_i > 0$, то $f_i(x_i) \geq 0.5(f_i(x_i+1) - f_i(x_i-1))$ или

$$f_i(x_i) - f_i(x_i - 1) \geq f_i(x_i + 1) - f_i(x_i). \qquad (1)$$

Неравенство (1) означает, что разность между значениями функции f_i в соседних точках не возрастает.

Теорема 3.10. (Критерий Гросса). В сделанных предположениях пусть x^* – оптимальное распределение ресурса в задаче $(II)'$. Тогда для x^* выполнено необходимое и достаточное условие:

$$x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) \geq \max_{i \leq i \leq n} [f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)]. \qquad (2)$$